

《举办乘凉州喵，举办乘凉州谢谢喵》

解题报告

浙江省诸暨中学 朱羿恺

1 题意简述

给出一棵大小为 n 的树。

定义 $x \rightarrow y$ 表示树上从 x 到 y 的简单路径，树上 x, y 两点的距离 $\text{dis}(x, y)$ 为 $x \rightarrow y$ 包含的边数。

定义树上一个点 u 到树上一条简单路径 $x \rightarrow y$ 的距离为 $\min_{v \in x \rightarrow y} \text{dis}(u, v)$ 。

有 q 次询问，第 i 次询问给出三个整数 x_i, y_i, d_i ，满足 $1 \leq x_i, y_i \leq n, 0 \leq d_i < n$ ，你需要求出距离 $x_i \rightarrow y_i$ 小于等于 d_i 的点数。

2 数据范围与约定

对于全部的数据， $1 \leq n, q \leq 2 \times 10^5$ 。

- 子任务 1 (7 分): $n, q \leq 5000$ 。
- 子任务 2 (8 分): $x_i = y_i$ 。
- 子任务 3 (23 分): $x_i \rightarrow y_i$ 最多只会包含 20 个点。
- 子任务 4 (22 分): $d_i \leq 20$ 。
- 子任务 5 (20 分): $n, q \leq 5 \times 10^4$ 。
- 子任务 6 (20 分): 无特殊限制。

时间限制: 3 s

空间限制: 1024 MB

3 解题思路

以下叙述均默认 n, q 同阶。

3.1 解法 1

以 $x \rightarrow y$ 上所有点作为起点进行多源 bfs，由此计算出每个点到 $x \rightarrow y$ 的距离后直接统计即可。

时间复杂度 $O(n^2)$ ，可以通过第一个子任务，预计得分 7 分。

3.2 解法 2

对于子任务 2，这是一个经典问题，直接点分治即可。

时间复杂度 $O(n \log n)$ ，结合解法一可以通过前两个子任务，预计得分 15 分。

3.3 解法 3

对于子任务 3，我们假设以 1 为根，令 z_i 为 x_i 和 y_i 的最近公共祖先，考虑把问题拆成 $z_i \rightarrow x_i$ 和 $z_i \rightarrow y_i$ 两个部分。

我们先求出距离 z_i 小于等于 d_i 的点数，注意到此时 $x_i \rightarrow z_i$ 还需要的统计的点为 $\sum_{u \in z_i' \rightarrow x_i} f_{u, d_i}$ ，其中 z_i' 表示 $z_i \rightarrow x_i$ 上的第二个点的编号， $f_{u, i}$ 表示 u 子树中距离 u 为 i 的点数。 $z_i \rightarrow y_i$ 也是同理。

对于单个 $f_{u, i}$ 的计算，这是一个简单的二维数点问题，可以线段树合并维护出每个点的 $f_{u, i}$ 或者根据 dfs 序离线解决。

时间复杂度 $O(20n \log n)$ ，结合前两个解法可以通过前三个子任务，预计得分 38 分。

3.4 解法 4

对于子任务 4，我们考虑在解法三的基础上稍作修改。

现在的问题在于如何快速计算 $\sum_{u \in z_i' \rightarrow x_i} f_{u, d_i}$ 。不难想到可以进行差分，把问题转为计算 $\sum_{u \in 1 \rightarrow x_i} f_{u, d_i} - \sum_{u \in 1 \rightarrow z_i} f_{u, d_i}$ ，令 $g_{i, j}$ 表示 $\sum_{u \in 1 \rightarrow i} f_{u, j}$ ，容易在 $O(nd)$ 的时间内预处理出 g 。

时间复杂度 $O(nd + n \log n)$ ，结合前三个解法，可以通过前四个子任务，预计得分 60 分。

3.5 解法 5

延续解法 4，现在的问题在于快速计算 $\sum_{u \in 1 \rightarrow x} f_{u, d}$ 。为了方便，我们转而计算距离 $1 \rightarrow x$ 小于等于 d 的点数，不难发现这样转化后答案依然是正确的（因为有差分，多出来的部分会被减掉）。

